ΘΕΩΡΗΜΑ: (ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΠΕΔΙΩΝ ΚΛΙΣΕΩΝ)

Έστω $G \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και συνεκτικό (δηλ. $\forall c_1, c_2 \in G$ $\exists$ μια πολυγωνική γραμμή (ή καμπύλη) $\gamma:[a,\beta]\to G$ με $\gamma(a)=c_1$ και $\gamma(\beta)=c_2$) και $f: G\to\mathbb{R}^n$ συνεχ. διαφορίσιμη

Τότε το $f$ είναι πεδίο κλίσεων (δηλ. $\exists \varphi: G\to\mathbb{R}$, το δυναμικό της $f$ (ή παράγουσα ή αντιπαράγωγος της $f$) με $\nabla\varphi = f$) $\Leftrightarrow$ τα επικαμπύλια ολοκληρώματα της $f$ είναι ανεξάρτητα του δρόμου (δηλ $\forall$ $\gamma:[a,\beta]\to G$ κατά τμήματα $C^1$ με $\gamma(a)=a$ και $\gamma(\beta)=x$):

$$\int_\gamma f\cdot dy = \varphi(x)-\varphi(a)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ/ΠΡΟΤΑΣΗ:

Έστω $\varphi: G\to\mathbb{R}$ δυναμικό της $f$. Τότε $\psi: G\to\mathbb{R}^n$ δυναμικό της $f \Leftrightarrow \exists C\in\mathbb{R}: \psi=\varphi+C$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

"$\Rightarrow$": Αφού, $\psi$ δυναμικό της $f$ τότε $\nabla\psi=\nabla\varphi \Rightarrow$
$\Rightarrow \nabla(\psi-\varphi)=0$. ΘΔΟ $\psi=\varphi+C$. Έχουμε αρκεί ότι $\exists C\in\mathbb{R}: \psi-\varphi=C$

Άρα, ΘΔΟ $\nabla g=0 \Rightarrow g=C$, $\forall C\in\mathbb{R}$

Έστω $x_0, x\in G\subset\mathbb{R}^n$ και $\gamma=\gamma_1\oplus\ldots\oplus\gamma_n$

$\gamma_i(t)=x_{i-1}+t(x_i-x_{i-1})\in G$, $t\in[0,1]$ με $x_n=x$

$$\Rightarrow g(x)-g(x_0)=\sum_{i=1}^{n}(g(x_i)-g(x_{i-1}))\in G,\ t\in[0,1]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(g(\gamma_i(1))-g(\gamma_i(0)))\overset{\Theta.\Omega.A\Pi_2}{=}\sum_{i=1}^{n}(g\circ\gamma_i(1)-g\circ\gamma_i(0))=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1(g\circ\gamma_i)'(t)\,dt\overset{\text{Καν. Αλυσ.}}{=}\int_0^1\overset{0}{\nabla g}(\gamma_i(t))\gamma_i'(t)\,dt=0$$

Δηλ. αν $x_0\in G$ σταθερό τότε

$\forall x\in G: g(x)=g(x_0)=C$

## ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ)

"$\Rightarrow$": Έστω $f=\nabla\varphi$. ΘΔΟ $\int_\gamma f(y)dy = \varphi(x)-\varphi(a)$

αν $\gamma:[a,\beta]\to G$ και $C^1$, $\gamma(a)=a$, $\gamma(\beta)=x$

Έστω $\gamma=\gamma_1\oplus\dots\oplus\gamma_n$ με $\gamma_i=\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ $C^1$

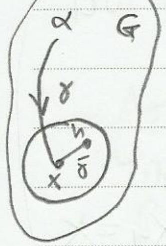
τότε $\int_{\gamma_i}\nabla\varphi(y)\,dy := \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\nabla\varphi)(\gamma(t))\cdot\gamma_i'(t)\,dt =$

$$\overset{\text{καν. αλυσ.}}{=} \int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{d}{dt}(\varphi(\gamma_i(t))\,dt \overset{\text{ΘΘ Απ}}{=} \varphi(\gamma(t_i))-\varphi(\gamma(t_{i-1})) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \nabla\varphi(\gamma)\cdot dy = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i}\nabla\varphi(y)\,dy = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\gamma_i(t))-\varphi(\gamma_{i-1}(t)) =$$

$$= \varphi(\gamma(t_n)) - \varphi(\gamma(t_0)) = \varphi(x)-\varphi(a)$$

"$\Leftarrow$": Έστω $a\in G$ ένα οποιοδήποτε σημείο του $G$
που το κρατάμε σταθερό
Μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση
$\phi(x) := \int_\gamma f(y)\cdot dy$ με $\gamma:[a,\beta]\to G$, $C^1$
με $\gamma(a)=a$, $\gamma(\beta)=x$, $\forall x\in G$
(η $\varphi$ είναι καλά ορισμένη επειδή τα επικαμπύλια ολοκληρώματα της $f$ στο $G$ είναι ανεξάρτητα του δρόμου ($\gamma$))




Θέλω νδο

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)-f(x)\cdot h}{\|h\|}=0$$

Αφού $G$ ανοιχτό τότε θα υπάρχει $\varepsilon>0$ : $B(x,\varepsilon)\subset G$
Έστω $h\in B(0,\varepsilon)$ και $\bar\gamma(t)=x+th$, $t\in[0,1]$
Τότε, $\varphi(x+h)=\int_{\gamma\oplus\bar\gamma} f(y)\,dy = \int_\gamma f(y)\,dy + \int_{\bar\gamma}f(y)\,dy =$

$$=\varphi(x)+\int_{\bar\gamma}f(y)\,dy\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x+h)-\varphi(x)=\int_{\bar\gamma}f(y)\,dy \quad (1)$$

κάνουμε μια εκτίμηση της ποσότητας:

$$\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)-f(x)\cdot h}{\|h\|}\right| \quad (2)$$

ΟΜΩΣ, $\int_{\bar\gamma} f(x)\cdot dy := \int_0^1 f(x)\cdot \bar\gamma'(t)\, dt = f(x)\cdot h$

Αρα, (2) είναι:

$$\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)-f(x)h}{\|h\|}\right| = \frac{1}{\|h\|}\cdot\left|\int_{\bar\gamma}(f(y)-f(x))dy\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\|h\|} L(\bar\gamma) \max_{y\in\bar\gamma([a,\beta])} \|f(y)-f(x)\| = \frac{1}{\cancel{\|h\|}} \cancel{\|h\|} \max_{y\in\bar\gamma([0,1])}\|f(y)-f(x)\| =$$

$$= 1 \max_{y\in\bar\gamma([0,1]) = \{y\in\mathbb{R}^n:\, y=x+th,\ t\in[0,1]\}} \|f(y)-f(x)\| \xrightarrow{h\to 0} 0$$

ΠΟΡΙΣΜΑ: (sos)

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα ενός διανυσματικού πεδίου είναι ανεξάρτητα του δρόμου $\Leftrightarrow$ τα επικαμπύλια ολοκληρώματα του διανυσματικού πεδίου είναι μηδέν κατά μήκος κάθε κλειστής καμπύλης

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$(\Rightarrow)$: Απο τον τύπο $\int_\gamma f(y)\,dy$ για $f=\nabla\varphi$

τότε $\int_\gamma \nabla\varphi\, dy = \varphi(x)-\varphi(a)$

Προκύπτει άμεσα για $x=a$

$(\Leftarrow)$: Εστω $\gamma_1:[a,\beta]\to G$, $\gamma_2:[\gamma,\delta]\to G$ δυο κατά τμήματα $C^1$ καμπύλη με $\gamma_1(a)=\gamma_2(\gamma)=a$, $\gamma_1(\beta)=\gamma_2(\delta)=b$

Απο υπόθεση

$$\int_{\gamma_1\oplus\gamma_2} f\cdot dy = 0 = \int_{\gamma_1} f\cdot dy + \int_{\gamma_2^-} f\cdot dy = \int_{\gamma_1} f\cdot dy - \int_{\gamma_2} f\cdot dy$$

}